

Die Biegeschwingungen ebener Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knoten

Falk, Sigurd

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 9, 1957, S.1-17



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Biegeschwingungen ebener Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knoten

Von Sigurd Falk

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

Mit 17 Abbildungen

Summary: The frequencies of vibrating plane framed structures with fixed rigid joints are exactly calculated by matrices and the well-known functions of Hohenemser-Prager.

Übersicht: Die Biege-Eigenschwingungszahlen ebener Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knoten werden mit Hilfe von Matrizen und der bekannten Hohenemser-Pragerschen Funktionen exakt berechnet.

1. Einleitung

Das Problem der Biegeschwingungen von Rahmen wird von linearen Differentialgleichungen vierter Ordnung beherrscht; es treten somit in jedem Felde vier freie Integrationskonstanten auf, die gewissen vorgeschriebenen Rand- und Übergangsbedingungen angepaßt werden müssen. Sind sämtliche Knoten des Rahmens unverschieblich, so lassen sich zwei dieser vier Konstanten von vornherein festlegen, wodurch der erforderliche Rechenaufwand auf etwa ein Achtel zurückgeht, da die für das Verfahren grundlegenden Leitmatrizen nur von zweiter, nicht mehr von vierter Ordnung sind. Für homogene Durchlaufträger werden fertige Frequenzgleichungen aufgestellt. Vier vollständig durchgerechnete Beispiele ergänzen den theoretischen Teil der Arbeit.

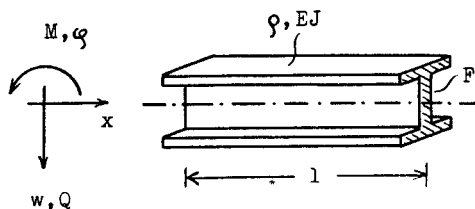
2. Die Grundgleichungen für den einzelnen Stab mit konstanten Kenngrößen

Die Differentialgleichung für die harmonischen Biegeschwingungen eines geraden Stabes mit konstanten Kenngrößen (Abb. 1) lautet bekanntlich

$$w'''' - k^4 w = 0; \quad ' = d/dx \quad (2.01)$$

mit

$$k^4 = \frac{\rho \cdot F}{EJ} \omega^2 [\text{cm}^{-4}] \quad (2.02)$$



Dabei bedeuten:

Abb. 1. Kenngrößen und Vorzeichen am geraden Balken

$$\left. \begin{array}{l} \rho [\text{kg sec}^2 \text{ cm}^{-4}]: \text{ Dichte} \\ F [\text{cm}^2]: \text{ Querschnittsfläche} \\ EJ [\text{kg cm}^2]: \text{ Biegesteifigkeit} \\ \omega [\text{Bog/sec}]: \text{ Kreisfrequenz} \end{array} \right\} \text{ des schwingenden Stabes} \quad (2.03)$$

Wir integrieren jetzt die Diff.-Glg. (2.01) und bekommen mit dem Fundamentalsystem

$$\left. \begin{aligned} \sin k \cdot x + \mathfrak{S} \sin k \cdot x &= a, & \sin k \cdot x - \mathfrak{S} \sin k \cdot x &= b \\ \cos k \cdot x + \mathfrak{C} \cos k \cdot x &= d, & \cos k \cdot x - \mathfrak{C} \cos k \cdot x &= e \end{aligned} \right\} \quad (2.04)$$

als allgemeine Lösung mit den vier Integrationskonstanten w_0 , w'_0 , M_0 und Q_0 :

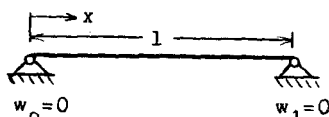
$$\left. \begin{aligned} w(kx) &= \frac{w_0}{d} & \frac{w'_0}{d} & - \frac{M_0}{e/EJk^2} - \frac{Q_0}{a/EJk^3} \\ w'(kx) &= -a & d & a/EJk & - e/EJk^2 \\ EJ \cdot w''(kx) = M(kx) &= -eEJk^2 & -aEJk & d & a \\ EJ \cdot w'''(kx) = Q(kx) &= aEJk^3 & -eEJk^2 & -a & d \end{aligned} \right\} \quad (2.05)$$

Und das sind die gesuchten Grundgleichungen für die Biegeschwingungen des einzelnen Stabes mit konstanten Kenngrößen. Für $x = 0$ wird aus (2.05) nach (2.04) eine Identität; für $x = l$ aber haben wir den linearen Zusammenhang der vier Größen w , w' , M und Q (Durchbiegung, Neigung, Biegemoment und Querkraft) an den beiden Stellen 0 und 1 des Stabes.

3. Die Leitmatrix für den Stab mit unverschieblichen Endpunkten

Jetzt sei insbesondere $w_0 = w_1 = 0$ (Abb. 2). Wir setzen in (2.05) $x = l$ ein und entfernen die nicht weiter interessierende Querkraft Q_0 mit Hilfe der ersten Zeile aus der zweiten und dritten. Das gibt:

$$\left. \begin{aligned} -w'_1 = \varphi_1 &= \frac{(db - ea)}{2b} \varphi_0 - \frac{(ab + e^2)}{2EJkb} M_0 \\ EJw''_1 = M_1 &= \frac{(b^2 - a^2)EJk}{2b} \varphi_0 + \frac{(db - ea)}{2b} M_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.01)$$



oder kurz

$$\varphi_1 = \mathfrak{L} \varphi_0 \text{ mit } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi \\ M \end{pmatrix} \quad (3.02)$$

Abb. 2. Gerader Balken mit unverschieblichen Enden

Die Elemente der hier auftretenden sogenannten „Leitmatrix“ \mathfrak{L} lassen sich einfach ausdrücken mit Hilfe der bekannten Funktionen von *Hohenemser-Prager* [1]:

$$\left. \begin{aligned} B(\lambda) &= \mathfrak{C} \cos \lambda \sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda \cos \lambda \\ S(\lambda) &= 2 \mathfrak{S} \sin \lambda \sin \lambda \\ D(\lambda) &= \mathfrak{C} \cos \lambda \cos \lambda - 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.03)$$

und zwar wird aus (3.01) nach einfacher Rechnung

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda} \begin{pmatrix} B(\lambda) & D(\lambda)/EJk \\ -S(\lambda)EJk & B(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.04)$$

oder noch einmal ausführlicher:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\Delta} \left[B(\lambda) \cdot \varphi_0 + \frac{D(\lambda)}{E J k} M_0 \right] \\ M_1 &= \frac{1}{\Delta} [-S(\lambda) E J k \cdot \varphi_0 + B(\lambda) M_0] \end{aligned} \right\} \quad (3.05)$$

mit den Abkürzungen

$$\lambda = k l, \quad \Delta = \sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda \quad (3.06)$$

Da, wie leicht nachzurechnen,

$$\Delta^2 = (\sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda)^2 = B^2 + S \cdot D \quad (3.07)$$

gilt, ist die Determinante der Leitmatrix gleich eins:

$$|\mathfrak{L}| = 1 \quad (3.08)$$

Der Leitmatrix (3.04) entnimmt man ohne weiteres die Frequenzgleichungen für die vier möglichen Lagerungsarten der Abb. 3: man hat je nach den geforderten Randbedingungen nur eine Zeile und eine Spalte zu streichen und das verbleibende Element gleich Null zu setzen. Den uninteressanten Wert $\lambda = k l = 0$ schließen wir im folgenden stets aus, so daß der Nenner Δ niemals verschwinden kann.

Die ersten Nullstellen der Funktionen $B(\lambda)$, $D(\lambda)$ und $S(\lambda)$ sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Die Nullstellen von $S(\lambda)$ sind nach (3.03) offenbar π , 2π , $3\pi \dots$ usw.; und da für große Werte von λ

$$\mathfrak{S} g \lambda \approx 1, \quad 1/\mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda \approx 0 \quad (3.09)$$

wird, ist mit guter Annäherung

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda \cdot \sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda \cos \lambda = \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda \cdot (\sin \lambda - \mathfrak{S} g \lambda \cdot \cos \lambda) \\ &\approx \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda \cdot (\sin \lambda - \cos \lambda) = 0, \end{aligned}$$

das heißt:

$$\lambda_i \approx \pi/4 + n \cdot \pi \text{ für } n = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda \cdot \cos \lambda - 1 = \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda (\cos \lambda - 1/\mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda) \\ &\approx \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \lambda \cos \lambda = 0, \end{aligned}$$

das heißt:

$$\lambda_i \approx \pi/2 + n \cdot \pi \text{ für } n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Die außerordentliche Güte dieser Näherungsformeln zeigen die eingeklammerten Werte der Tabelle 1, wo $\lambda < 10$ ist!

Tabelle 1. Die ersten Nullstellen der Funktionen $B(\lambda)$, $D(\lambda)$ und $S(\lambda)$

| $B(\lambda) = 0$ | $D(\lambda) = 0$ | $S(\lambda) = 0$ |
|--|--|-----------------------------|
| $\lambda_1 = 3,9265 \left(\frac{5}{4} \pi = 3,9270 \right)$ | $\lambda_1 = 4,7299 \left(\frac{3}{2} \pi = 4,7124 \right)$ | $\lambda_1 = 3,1416 = \pi$ |
| $\lambda_2 = 7,0685 \left(\frac{9}{4} \pi = 7,0686 \right)$ | $\lambda_2 = 7,8531 \left(\frac{5}{2} \pi = 7,8540 \right)$ | $\lambda_2 = 6,2832 = 2\pi$ |
| | | $\lambda_3 = 9,4248 = 3\pi$ |

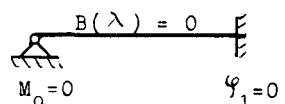
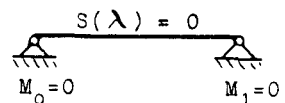
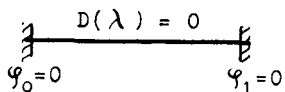
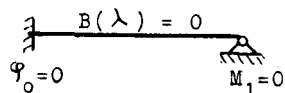


Abb. 3. Frequenzgleichungen für die geraden Balken mit unverschieblichen Enden

4. Biegeschwingungen von Durchlaufträgern

Wir betrachten jetzt einen Durchlaufträger auf festen Stützen mit n Feldern nach Abb. 4. Nach (3.02) gilt nun der Reihe nach:

$$v_1 = \mathfrak{L}_1 v_0, \quad v_2 = \mathfrak{L}_2 v_1, \quad \dots \quad v_n = \mathfrak{L}_n \cdot v_{n-1} \quad (4.01)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \mathfrak{L}_n \mathfrak{L}_{n-1} \dots \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_1 v_0 \\ v_n &= \mathfrak{P}_n \cdot v_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.02)$$

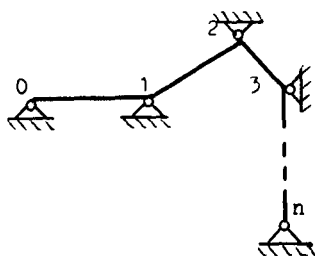


Abb. 4. Durchlaufträger
auf festen Stützen

Ausführlich:

$$\begin{bmatrix} \varphi_n \\ M_n \end{bmatrix} = \mathfrak{P}_n \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (4.03)$$

Also auch in \mathfrak{P}_n braucht man nur ein bestimmtes Element gleich Null zu setzen; das gibt bereits die gesuchte Frequenzgleichung. Die praktische Rechnung nach (4.02) zeigt das Schema (4.04): von den beiden Werten φ_0 und M_0 ist stets einer gleich Null; den anderen nennen wir den „Freiwert“ A . Den zu A gehörigen Einheitsvektor multiplizieren wir nun an sämtlichen Leitmatrizen vorbei, bis unten rechts die Werte φ_n und M_n erscheinen, von denen einer gleich Null zu setzen ist. Der Freiwert A steht dabei als belangloser Faktor und bleibt unbestimmbar, solange es sich um freie Schwingungen handelt, die wir hier ausschließlich betrachten wollen.

$$\left. \begin{aligned} &A \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = v_0 \\ &\mathfrak{L}_1 \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} \\ &\mathfrak{L}_2 \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} \\ &\dots \downarrow \\ &\mathfrak{L}_n \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_n \\ M_n \end{bmatrix} = v_n \end{aligned} \right\} \quad (4.04)$$

Besonders einfach liegen die Verhältnisse, wenn das Tragwerk „homogen“ ist, d. h. für alle Felder nur einen einzigen gemeinsamen Kennwert $\lambda = kl$ besitzt; das ist zum Beispiel immer dann der Fall, wenn sämtliche vorkommenden Größen

$$l, EI, \varrho \text{ und } F$$

und damit auch alle Leitmatrizen einander gleich sind, so daß (4.02) übergeht in

$$v_n = \mathfrak{P}_n v_0 = \mathfrak{L}^n \cdot v_0 \quad (4.05)$$

Setzen wir noch zur Vereinfachung

$$\widehat{D} = \frac{D}{B \cdot EJ \cdot k}, \quad \widehat{S} = \frac{S}{B} \cdot EJ \cdot k, \quad (4.06)$$

ferner

$$\widehat{D} \cdot \widehat{S} = \frac{D \cdot S}{B^2} = F, \quad (4.07)$$

so wird

$$\mathfrak{L} = \frac{B}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & \widehat{D} \\ -\widehat{S} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.08)$$

und die Potenzen dieser Matrix lassen sich allgemein hinschreiben. Wie eine einfache Rechnung zeigt, ist

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{L}^n = \frac{B^n}{\Delta^n} \begin{bmatrix} N_n & \widehat{D} H_n \\ -\widehat{S} \cdot H_n & N_n \end{bmatrix} \quad (4.09)$$

mit

$$\begin{aligned} N_n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{2} F + \binom{n}{4} F^2 - + \dots = \sum \binom{n}{2\nu} (-F)^\nu \\ H_n &= \binom{n}{1} - \binom{n}{3} F + \binom{n}{5} F^2 - + \dots = \sum \binom{n}{2\nu+1} (-F)^\nu \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Die ersten sechs dieser Funktionen findet man in Tabelle 2, die Frequenzbedingungen für homogene Durchlaufträger zeigt Abb. 5 als Erweiterung von Abb. 3. Bei der Auswertung der Formeln ist auf folgendes zu achten: die Funktion Δ wird niemals Null (der Wert $\lambda = 0$ bleibt ja für immer ausgeschlossen!); wenn aber N_n , H_n von der Form

$$a_0 + a_1 \cdot F + a_2 \cdot F^2 + \dots + a_\nu F^\nu \quad (4.11)$$

sind, so brauchen wir nach (4.07) noch den Faktor $B^{2\nu}$, um sämtliche Nenner zu beseitigen. Für gewisse Randbedingungen und Felderzahlen n bleibt daher von dem Faktor B^n in (4.09) gerade eine Potenz B übrig, wodurch sich die Bedingungen $B=0$ in Abb. 5 erklären. Von der Summe (4.11) kann übrigens niemals ein einzelner Summand verschwinden, da die drei Funktionen B , D und S keine gemeinsamen Nullstellen haben.

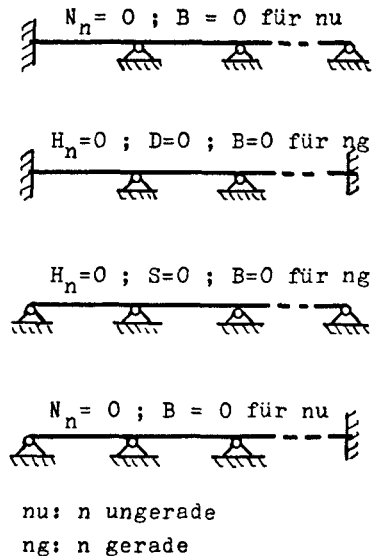


Abb. 5. Frequenzgleichungen für den homogenen Durchlaufträger

Tab. 2: Frequenzbedingungen mit zugehörigen Nullstellen für homogene Durchlaufträger

| Fall 1: $\varphi_0 = 0, M_n = 0;$ $B^n \cdot N_n / \Delta^n = 0$ Fall 2: $\varphi_0 = 0, \varphi_n = 0;$ $\hat{D} \cdot B^n \cdot H_n / \Delta^n = 0$ Fall 3: $M_0 = 0, M_n = 0;$ $-\hat{S} \cdot B^n \cdot H_n / \Delta^n = 0$ Fall 4: $M_0 = 0, \varphi_n = 0;$ $B^n \cdot N_n / \Delta^n = 0$ | | | | |
|---|---------------------------|-----------------------|--------------------|--------------------|
| n | N_n | Nullstellen | H_n | Nullstellen |
| 1 | 1 | keine | 1 | keine |
| 2 | $1 - F$ | 1 | 2 | keine |
| 3 | $1 - 3 F$ | 1/3 | $3 - F$ | 3 |
| 4 | $1 - 6 F + F^2$ | $3 \pm 2 \sqrt{2}$ | $4 - 4 F$ | 1 |
| 5 | $1 - 10 F + 5 F^2$ | $1 \pm 2/\sqrt{5}$ | $5 - 10 F + F^2$ | $5 \pm 2 \sqrt{5}$ |
| 6 | $1 - 15 F + 15 F^2 - F^3$ | $1; 7 \pm 4 \sqrt{3}$ | $6 - 20 F + 6 F^2$ | 1/3; 3 |

Wir untersuchen jetzt die wichtige Funktion

$$F(\lambda) = \frac{D(\lambda) \cdot S(\lambda)}{B^2(\lambda)}, \quad (4.12)$$

deren Nullstellen und (zweifachen) Pole durch die Nullstellen von D , S und B gegeben sind. Nun ist nach (3.07)

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\Delta^2 - B^2}{B^2} = \left(\frac{\Delta}{B}\right)^2 - 1 = \left[\frac{\sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda}{\mathfrak{C} \cos \lambda \sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda \cos \lambda} \right]^2 - 1 \\
&= \left[\frac{\sin \lambda / \mathfrak{C} \cos \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda}{\sin \lambda - \mathfrak{S} \sin \lambda \cos \lambda} \right]^2 - 1
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Für große Werte von λ wird daraus nach (3.09)

$$F \approx \left[\frac{-1}{\sin \lambda - \cos \lambda} \right]^2 - 1 = \frac{1}{1 - \sin 2\lambda} - 1 \quad (4.14)$$

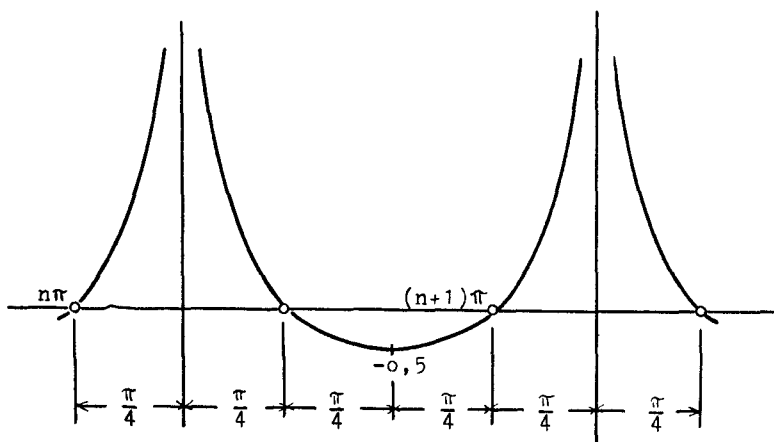


Abb. 6. Periode der Funktion (4.14)

Eine Periode dieser Funktion zeigt die Abb. 6. Man erkennt aus Abb. 7, wie schnell sich $F(\lambda)$ der Form (4.14) nähert. In Tabelle 3 sind einige Funktionswerte $F(\lambda)$ im Bereich $0 \leq \lambda \leq 10$ zusammengestellt. Für Werte $\lambda > 10$ benutzt man die Beziehung (4.14), die nach $\sin 2\lambda$ aufgelöst so lautet:

$$\sin 2\lambda = \frac{1}{1 + 1/F} \quad (4.15)$$

Ist nun irgendein homogener Durchlaufträger mit n Feldern gegeben, so liefern die gleich Null gesetzten Polynome (4.10) $\alpha \leq n/2$ Nullstellen F_i und damit α Serien von je ∞^1 Eigenschwingungszahlen; jede dieser Serien liefert ein einziger zur λ -Achse paralleler Strich durch die Funktion F (Abb. 7) bzw. durch die Sinuslinie (4.15).

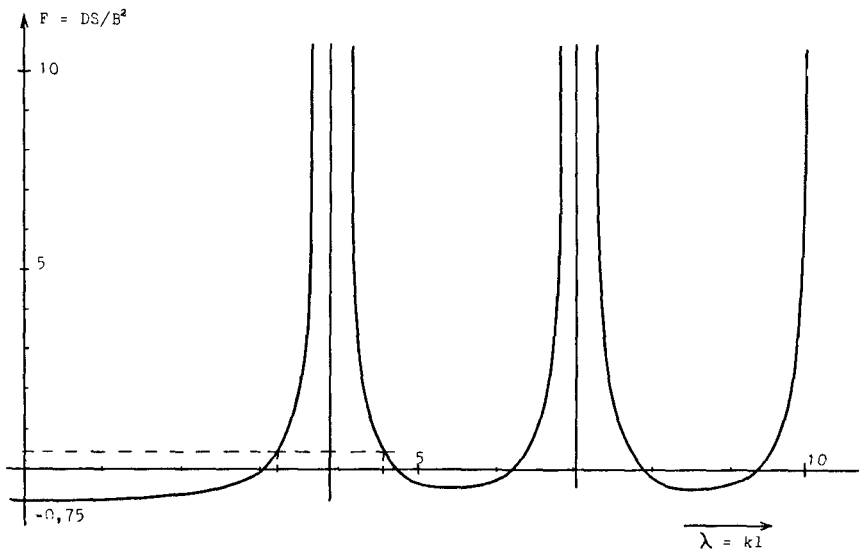


Abb. 7. Die Funktion $F = DS/B^2$ im Bereich $0 \leq \lambda \leq 10$

Tabelle 3. Einige Funktionswerte von $F = D \cdot S/B^2$

| | ,0 | ,2 | ,4 | ,6 | ,8 |
|--|-----------|----------|----------|----------|----------|
| 0, | -0,75000 | — | — | — | — |
| 1, | -0,74700 | — | — | — | — |
| 2, | -0,69618 | — | — | — | — |
| 3, | -0,24120 | +0,14322 | 1,04810 | 4,09883 | 32,12888 |
| 4, | 97,28591 | 6,22696 | 1,52083 | 0,33814 | -0,12052 |
| 5, | -0,33559 | -0,44223 | -0,48814 | -0,49002 | -0,44831 |
| 6, | -0,34740 | -0,14150 | 0,30025 | 1,44727 | 6,08471 |
| 7, | 105,21543 | 28,04958 | 3,71220 | 0,94327 | 0,11893 |
| 8, | -0,22457 | -0,39017 | -0,47062 | -0,49950 | -0,48705 |
| 9, | -0,42901 | -0,30299 | -0,04721 | +0,52287 | 2,14456 |
| 10, | 10,50134 | — | — | — | — |
| Nullstellen: 3,14; 4,72; 6,28; 7,84; 9,42. | | | | | |
| Pole: 3,92; 7,06. | | | | | |

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und bringen an jeder Stütze des Durchlaufträgers eine Drehfeder mit dem Reaktionsmoment

$$M_{C_i} = -C_i \cdot \varphi_i; \quad C_i [\text{kg cm}] \quad (4.16)$$

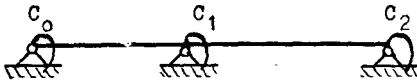


Abb. 8. Durchlaufträger mit Drehfedern

an (Abb. 8). Zwischen den Biegemomenten unmittelbar links und rechts von der Stütze besteht dann die Beziehung

$$M_{ir} = M_{il} - C_i \varphi_i, \quad (4.17)$$

das heißt, die Leitmatrix \mathfrak{L}_i ist noch von links mit der „Übergangsmatrix“

$$\mathfrak{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_i & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

zu multiplizieren, was wir jedoch einfacher mit Hilfe einer „verschränkten“ Matrizenmultiplikation in folgender Weise bewerkstelligen:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ M_{i-1} \end{bmatrix} = \mathfrak{y}_{i-1}$$

$$\mathfrak{L}_i = \frac{B_i}{\Delta_i} \begin{bmatrix} 1 & \widehat{D}_i & 0 \\ -\widehat{S}_i & 1 & -C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ -\widehat{S}_i \varphi_{i-1} + M_{i-1} - C_i \varphi_i \end{bmatrix} = \frac{B_i}{\Delta_i} \cdot \mathfrak{y}_i \quad (4.19)$$

Man faßt also die erste Komponente von \mathfrak{y}_i als dritte Komponente von \mathfrak{y}_{i-1} auf und kann damit die rechteckige erweiterte Leitmatrix mit drei Spalten und zwei Zeilen nach gewöhnlichen Matrizenregeln multiplizieren.

5. Die Biegeschwingungen ebener offener Rahmentragwerke

Wir denken uns einen Durchlaufträger nach dem Schema (4.04) bis zu einer Stütze n durchgerechnet und bilden den Quotienten

$$-\frac{M_n}{\varphi_n} = C_n; \quad \varphi_n \neq 0, \quad (5.01)$$

der nach (4.16) nichts anderes darstellt als die (trägheitsbelastete) Ersatzdrehfeder des Trägers im Punkte n . Diese Drehfedern kann man für homogene Träger aus (4.09) und Tabelle 2 unmittelbar entnehmen, und zwar ist für

$$\varphi_0 = 0 \text{ (Im Punkt 0 eingespannt): } -C_a^{(n)} = \frac{N_n}{\widehat{D} \cdot H_n} \quad (5.02)$$

$$M_0 = 0 \text{ (Im Punkt 0 gelenkig): } -C_b^{(n)} = \frac{-\widehat{S} \cdot H_n}{N_n}. \quad (5.03)$$

Für den einfeldrigen Balken wird insbesondere wegen $N_1 = H_1 = 1$ (Tabelle 2):

$$\left. \begin{aligned} -C_a^{(1)} &= \frac{1}{\widehat{D}} = \frac{B \cdot kl}{D} \cdot \frac{EJ}{l}; & (\text{für } k=0) &\rightarrow -4 \frac{EJ}{l} \\ -C_b^{(1)} &= -\widehat{S} = \frac{-S \cdot kl}{B} \cdot \frac{EJ}{l}; & (\text{für } k=0) &\rightarrow -3 \frac{EJ}{l} \end{aligned} \right\} \quad (5.04)$$

Ist der Balken masselos, so gehen die Drehfederkonstanten mit $\varrho = 0$, $\lambda = kl = 0$ in bekannte Ausdrücke der Statik über, wie durch die Pfeile in (5.04) angedeutet.

Jetzt sind wir in der Lage, auch beliebige offene Tragwerke zu erledigen: wir erklären irgendeinen durchlaufenden Linienzug des Rahmens zum Haupt-

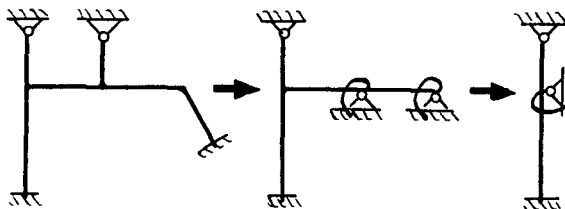


Abb. 9. Zurückführung eines offenen Rahmens auf einen drehgefederten Durchlaufträger

träger, schneiden alle Seitenzweige ab und ersetzen sie durch ihre Drehfedern. Die weitere Rechnung verläuft dann wieder nach (4.19). Auch bei mehrfachen Verzweigungen kommt man auf diese Weise immer zum Ziel (Abb. 9).

6. Die Biegeschwingungen ebener geschlossener Rahmen

Wir schneiden einen offenen Rahmen an zwei Stützen p und q auf und ermitteln den linearen Zusammenhang zwischen den Momenten M_p , M_q und den Neigungen φ_p , φ_q (Abb. 10). Zu diesem Zweck setzen wir im Schema (4.04) die beiden Freiwerte M_p und φ_p ein und erhalten zum Schluß die Beziehung

$$\begin{bmatrix} -M_p \\ M_q \end{bmatrix} = \mathfrak{C}_{pq} \begin{bmatrix} \varphi_q \\ \varphi_p \end{bmatrix}. \quad (6.01)$$

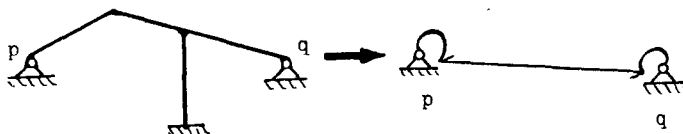


Abb. 10. Ersatz eines offenen Rahmens durch eine beidseitige Drehfeder

Die hier auftretende, nach dem Satz von *Maxwell-Betti* stets nebensymmetrische Matrix \mathfrak{C}_{pq} heißt die Federmatrix des Stützenpaares $p; q$. Wir haben auf die linke Seite $-M_p$ (nicht $+M_p$) geschrieben, weil dann (6.01) unmittelbar angibt, wie die Trägheitsbelastung des schwingenden Rahmenabschnittes p, q in den Schnitten p und q auf die Umgebung „abgesetzt“, d. h. in welchem Verhältnis sie verteilt wird. Das Symbol für diese beidseitige Ersatzfeder zeigt die Abb. 10 rechts. Für den einfeldrigen Balken findet man aus der Leitmatrix (4.08) durch bloßes Umordnen:

$$\begin{bmatrix} -M_0 \\ M_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} -\Delta/B & 1 \\ 1 & -\Delta/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \mathfrak{C}_{01} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} \quad (6.02)$$

Mit Hilfe der Federmatrizen (6.01) gelingt nun auch die Berechnung geschlossener Rahmen: wir brauchen ein Tragwerk nur derart in eine Anzahl von s Strängen zu zerlegen, daß die diese Stränge verbindenden Glieder selbst offene Träger darstellen, deren beidseitige Ersatzfederkonstanten ja durch (6.01) gegeben sind. Eine solche Zerlegung ist immer möglich. Jeder der s so entstehenden Stränge wird wie üblich mit seinem Freiwert A_s durchgerechnet, doch werden diese Freiwerte infolge der Kopplung (6.01) jetzt linear miteinander verknüpft, so daß zum Schluß infolge der s Randbedingungen an den „rechten“ Enden der Stränge eine s -reihige Determinante gleich Null zu setzen ist, was bereits die gewünschte Frequenzgleichung liefert.

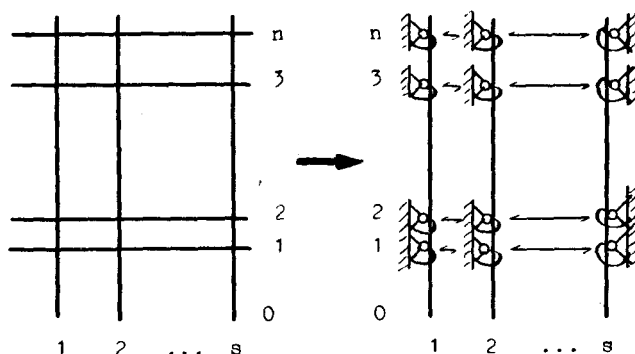


Abb. 11. Rechteckiges Netzwerk mit Ersatzsystem

Besonders übersichtlich wird die Rechnung bei rechteckigen Netzwerken und den ihnen topologisch gleichwertigen Gebilden (Abb. 11); man führt dann als Erweiterung von (4.08) den Vektor φ_i und die Leitmatrix \mathfrak{L}_i ein:

$$\varphi_i = (\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_s; M_s \dots M_2, M_1)_i \quad (6.03)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} B_1/\Delta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & B_1\widehat{D}_1/\Delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2/\Delta_2 & \dots & \dots & B_2\widehat{D}_2/\Delta_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_s/\Delta_s & B_s\widehat{D}_s/\Delta_s & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -B_s\widehat{S}_s/\Delta_s & B_s/\Delta_s & \dots & 0 & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & -B_2\widehat{S}_2/\Delta_2 & \dots & \dots & B_2/\Delta_2 & 0 & & & & & \\ -B_1\widehat{S}_1/\Delta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & B_1/\Delta_1 & & & & & \end{array} \right]_i \quad \mathfrak{L}_i$$

Die s -reihige Federmatrix \mathfrak{L}_i unten rechts enthält hier sämtliche ein- und zweiseitigen Drehfedern der gemeinsamen Feldgrenze i . Für homogene Netzwerke geht (6.03) über in

$$\mathfrak{L}_i = B/\Delta \left[\begin{array}{cc|c} \mathfrak{L} & \widehat{D}\mathfrak{L} & 0 \\ -\widehat{S} & \mathfrak{L} & \mathfrak{L}_i \end{array} \right], \quad (6.04)$$

geschrieben in s -reihigen quadratischen Untermatrizen mit

$$\mathfrak{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.05)$$

\mathfrak{E} ist die Einheitsmatrix. Die Multiplikation einer beliebigen Matrix \mathfrak{M} mit \mathfrak{Q} von links (rechts) bedeutet lediglich eine Umordnung der Zeilen (Spalten) von \mathfrak{M} .

7. Symmetrische Tragwerke

Das Tragwerk besitze eine Symmetrieachse $a - a$, die einzelne seiner Stäbe entweder in Feldmitte (Abb. 12, Fall I) oder an einer Stütze schneidet (Fall II). Dann gilt für

| | Fall I | Fall II | } | (7.01) |
|--------------------------------|--------------------------|-----------------|---|--------|
| symmetrische Schwingungsformen | $\varphi_l = -\varphi_r$ | $\varphi_m = 0$ | | |
| schiefsymmetrische | $\varphi_l = \varphi_r$ | $M_m = 0$ | | |

Man kann sich daher auf die Berechnung nur einer Hälfte des Tragwerkes beschränken.

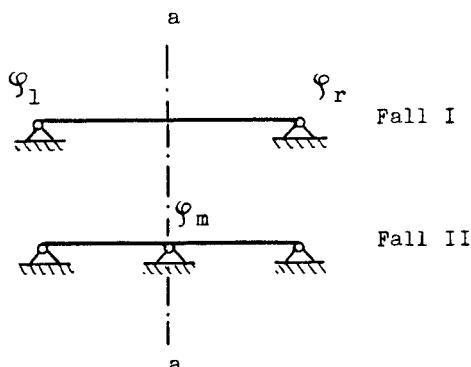


Abb. 12. Rahmen mit Symmetrieachse, schematisch

8. Veränderliche Kennwerte

Die grundlegende Differentialgleichung laute an Stelle von (2.01) allgemeiner:

$$[EJ(x) \cdot w''(x)]'' - \varrho(x) \cdot F(x) \omega^2 = 0. \quad (8.01)$$

Kreis- und Hyperbelfunktionen sind jetzt offenbar keine Lösungen mehr, und es wird schwierig sein, exakte Lösungen der Gleichung (8.01) in geschlossener Form anzugeben. Ist aber irgendein Fundamentalsystem bekannt, so ist die Rechnung mit abgeänderten Leitmatrizen die gleiche wie bisher. Einzelheiten dazu findet man in der Arbeit [2].

9. Praktische Durchführung und Beispiele

Die praktische Rechnung ist durch das Schema (4.04) festgelegt, das bei mehreren Strängen gemäß (6.03) erweitert wird. Die expliziten Frequenzgleichungen nicht homogener Tragwerke sind im allgemeinen recht umfangreich und schwer zu übersehen; auch verlieren hier infolge der verschiedenen Argumente $\lambda = kl$ die *Hohenemser-Pragerschen* Funktionen ihren praktischen Wert. Man setzt daher besser einen zweckmäßig gewählten festen Wert λ in alle Leitmatrizen ein und ermittelt den zugehörigen Zahlenwert der Frequenzdeterminante. Dies wiederholt man einige Male und bestimmt den Nulldurchgang der Funktion $\text{Det}(\lambda)$ durch Interpolation.

Oft leisten auch die folgenden Reihenentwicklungen gute Dienste:

$$B(x) = 2^2 \cdot \frac{x^3}{3!} - 2^4 \cdot \frac{x^7}{7!} + 2^6 \cdot \frac{x^{11}}{11!} - + \dots \quad (9.01)$$

$$S(x) = 2^2 \cdot \frac{x^2}{2!} - 2^4 \cdot \frac{x^6}{6!} + 2^6 \cdot \frac{x^{10}}{10!} - + \dots \quad (9.02)$$

$$D(x) = -2^2 \cdot \frac{x^4}{4!} + 2^4 \cdot \frac{x^8}{8!} - 2^6 \cdot \frac{x^{12}}{12!} + - \dots \quad (9.03)$$

$$\Delta(x) = -2 \cdot \left[\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots \right]. \quad (9.04)$$

Beispiel 1. Die niedrigsten vier Eigenfrequenzen des homogenen Durchlaufträgers mit Kreisquerschnitt (Abb. 13) sind zu ermitteln. Gegebene Werte:

$$\gamma = 7,8 \text{ [kg/cm}^3\text{]}, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ [kg/cm}^2\text{]}, r = 2 \text{ [cm]}, l = 220 \text{ [cm]}.$$

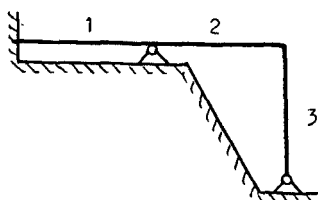


Abb. 13. Homogener Durchlaufträger mit drei Feldern

Nach Abb. 5, Fall 1 und Tabelle 2 lauten die Bedingungen:

$$N_3 = 1 - 3F = 0; B = 0 \text{ (} n \text{ ungerade!)} \quad (9.05)$$

Die ersten Nullstellen von B sind nach Tabelle 1:

$$\lambda = 3,93 \text{ und } \lambda = 7,07 \quad (9.06)$$

Weiter folgt aus $F = 1/3$ nach Abb. 7:

$$\lambda = 3,26 \text{ und } \lambda = 4,61 \quad (9.07)$$

Nun ist $\lambda^4 = k^4 l^4 = \rho \cdot F \omega^2 l^4 / EJ$ (2.02); ferner gilt für den Kreisquerschnitt $J = F r^2 / 4$, daher

$$\omega^2 = \frac{\lambda^4 EJ}{\rho \cdot F l^4} = \lambda^4 \frac{g \cdot E \cdot r^2}{\gamma \cdot 4 l^4} = \lambda^4 \cdot \frac{981 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2^2}{7,8 \cdot 4 \cdot 220^4} = \lambda^4 \cdot 0,1129 \text{ [sec}^{-2}\text{]}$$

$$\omega = \lambda^2 \cdot 0,336 \text{ [sec}^{-1}\text{]}, f = 30 \omega / \pi = 3,21 \lambda^2 \text{ [Schw./min]}.$$

Nach (9.06) und (9.07) finden wir also in [Schw./min]:

$$f_1 = 3,21 \cdot 3,26^2 = 34,2; f_2 = 3,21 \cdot 3,93^2 = 49,5;$$

$$f_3 = 3,21 \cdot 4,61^2 = 68,3; f_4 = 3,21 \cdot 7,07^2 = 160,5.$$

Beispiel 2. Die niedrigsten Eigenfrequenzen für das homogene offene Tragwerk der Abb. 14 sind zu ermitteln.

Den Ersatzträger zeigt die Abb. 14 rechts. Nach (5.04) ist

$$-C_b^{(1)} = -\widehat{S}; \quad -C_a^{(1)} = 1/\widehat{D} \quad (9.08)$$

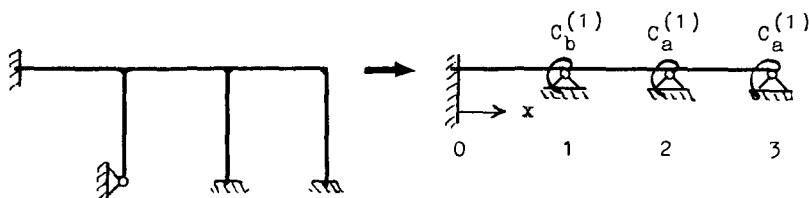


Abb. 14. Offener homogener Rahmen mit Ersatzträger

Damit lassen sich die drei Leitmatrizen \mathfrak{L}_i nach (4.19) hinschreiben. Der Freiwert ist M_0 . Bei der Rechnung ist die Beziehung $\widehat{D}\widehat{S} = F$ zu beachten.

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{L}_1 &= \frac{B}{A} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \widehat{D} & 0 \\ -\widehat{S} & 1 & -\widehat{S} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \widehat{D} \\ 1 - F \end{array} \right] \frac{B}{A} \\ \mathfrak{L}_2 &= \frac{B}{A} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \widehat{D} & 0 \\ -\widehat{S} & 1 & 1/\widehat{D} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \widehat{D}(2-F) \\ 3-3F \end{array} \right] \frac{B^2}{A^2} \\ \mathfrak{L}_3 &= \frac{B}{A} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \widehat{D} & 0 \\ -\widehat{S} & 1 & 1/\widehat{D} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \widehat{D}(5-4F) \\ 8-9F+F^2 \end{array} \right] \frac{B^3}{A^3} = \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ M_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Bedingung im Punkte 3 des Ersatzträgers lautet

$$M_3 = \frac{B^3}{A^3} (8 - 9F + F^2) = \frac{1}{A^3 B} \cdot B^4 (8 - 9F + F^2); \quad B \neq 0 \quad (9.09)$$

mit den Lösungen $F_1 = 1$ und $F_2 = 8$. Man zieht daher zwei waagerechte Linien im Abstand 1 und 8 von der λ -Achse durch die Kurve der Abb. 7 und findet:

$$\begin{aligned} \text{aus } F = 1: \lambda &= 3,40, \quad 4,45 \\ \text{aus } F = 8: \lambda &= 3,65, \quad 4,20. \end{aligned}$$

Beispiel 3. Die Frequenzgleichung für das nicht homogene Tragwerk der Abb. 15 ist aufzustellen. Der Kennwert des Mittelstückes $A_0 A_1$ sei k_2 ; die übrigen fünf Felder haben den Kennwert k_1 .

Nach (5.04) läßt sich der einfeldrige Ersatzträger (Abb. 15 rechts) unmittelbar angeben. Der Anfangsvektor ist $\psi_0 = (\varphi_0, -C_0 \varphi_0)$. Mit dem Freiwert φ_0 und den Abkürzungen

$$B_1 = B(\lambda_1), \quad B_2 = B(\lambda_2), \quad \text{usw.} \quad (9.10)$$

haben wir somit folgende einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \varphi_0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3/\widehat{D}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \\ \frac{B_2}{A_2} \begin{bmatrix} 1 & \widehat{D}_2 & 0 \\ -\widehat{S}_2 & 1 & -2\widehat{S}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 3\widehat{D}_2/\widehat{D}_1 \\ -\widehat{S}_2 + 3/\widehat{D}_1 - 2\widehat{S}_1 - 6\widehat{S}_1\widehat{D}_2/\widehat{D}_1 \end{bmatrix} \frac{B_2}{A_2} &= \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

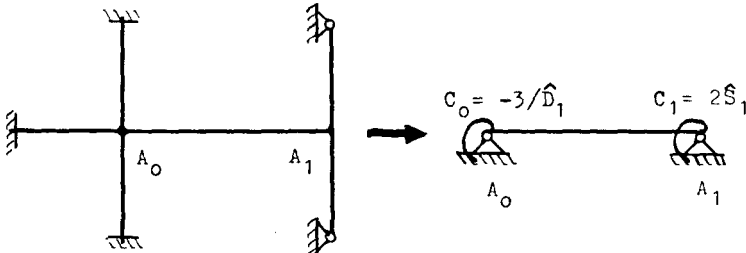


Abb. 15. Offener, nicht homogener Rahmen mit Ersatzträger

Also lautet die Frequenzbedingung

$$A_2 M_1 = B_2 [-\widehat{S}_2 + 3/\widehat{D}_1 - 2\widehat{S}_1 (1 + 3\widehat{D}_2/\widehat{D}_1)] = 0, \quad (9.11)$$

oder etwas übersichtlicher mit der Abkürzung

$$\alpha = \frac{EJ_1 \cdot k_1}{EJ_2 \cdot k_1} = \frac{EJ_1}{EJ_2} \cdot \frac{\varrho_1 F_1}{\varrho_2 F_2} \quad (9.12)$$

und den ebenfalls bei *Hohenemser-Prager* tabulierten Funktionen

$$\frac{S(\lambda)}{B(\lambda)} = P(\lambda) \quad \text{und} \quad \frac{B(\lambda)}{D(\lambda)} = Q(\lambda) \quad (9.13)$$

$$0 = B_2 \cdot EJ_2 \cdot k_2 \cdot [-P_2 + 3 \cdot Q_1 \cdot \alpha - 2 \cdot P_1 \cdot \alpha \cdot (1 + 3 \cdot Q_1 \alpha / Q_2)] \quad (9.14)$$

Beispiel 4. Die niedrigsten Eigenfrequenzen des homogenen geschlossenen Tragwerkes der Abb. 16 sind zu ermitteln.

Das Strangschema mit $s = 2$ Strängen zeigt die Abb. 16 rechts. Die Feder-matrizen \mathfrak{C}_i in den Leitmatrizen (6.04) sind infolge des Rahmenteiles ABS voneinander verschieden; es ist für die Rechnung bequem, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^*/\widehat{D}$ zu setzen (6.02). Der Anfangsvektor ist hier, da wegen der gelenkigen Lagerung in D und E die Momente M_{l0} und M_{r0} verschwinden müssen, nach (6.03):

$$\mathfrak{v}_0 = \begin{bmatrix} \varphi_{l0} \\ \varphi_{r0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{l0} & \varphi_{r0} \\ \varphi_{l0} & \varphi_{r0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C} \\ \mathfrak{D} \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

Die Biegeschwingungen ebener Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knoten 15

Wir rechnen zunächst in zweireihigen Untermatrizen und bekommen wegen $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E}$ (6.05) und $\widehat{D} \cdot \widehat{S} = F$ (4.07) das Schema:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \frac{B}{A} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \widehat{D} \mathfrak{A} & 0 \\ -\widehat{S} \mathfrak{A} & \mathfrak{E} & \mathfrak{E}_1^* / \widehat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ -\widehat{S} \mathfrak{A} + \mathfrak{E}_1^* / \widehat{D} \end{bmatrix} \frac{B}{A} \\ & \frac{B}{A} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \widehat{D} \mathfrak{A} & 0 \\ -\widehat{S} \mathfrak{A} & \mathfrak{E} & \mathfrak{E}_2^* / \widehat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-F) \mathfrak{E} + \mathfrak{A} \mathfrak{E}_1^* \\ -2\widehat{S} \mathfrak{A} + \mathfrak{E}_1^* / \widehat{D} + (1-F) \mathfrak{E}_3^* / \widehat{D} + \mathfrak{E}_2^* \mathfrak{A} \mathfrak{E}_1^* / \widehat{D} \end{bmatrix} \frac{B^2}{A^2} \\ & \frac{B}{A} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \widehat{D} \mathfrak{A} \\ -\widehat{S} \mathfrak{A} & \mathfrak{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-3F) \mathfrak{E} + 2 \mathfrak{A} \mathfrak{E}_1^* + (1-F) \mathfrak{A} \mathfrak{E}_2^* + \mathfrak{A} \mathfrak{E}_2^* \mathfrak{A} \mathfrak{E}_1^* \\ \dots \end{bmatrix} \frac{B^3}{A^3} \end{aligned}$$

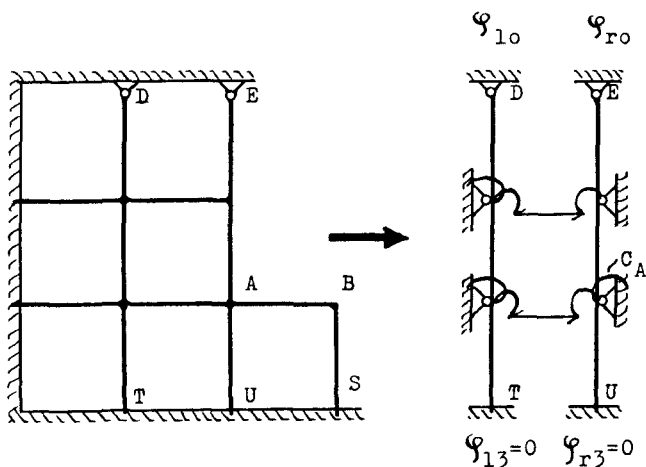


Abb. 16. Geschlossener homogener Rahmen mit Ersatzschema

Die Randbedingungen in den Punkten T und U sind infolge der festen Einspannungen

$$\begin{bmatrix} \varphi_{13} \\ \varphi_{r3} \end{bmatrix} = \frac{B^3}{A^3} \cdot \mathfrak{Q} \begin{bmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{r0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.16)$$

also ist

$$\frac{B^6}{A^6} \cdot |\mathfrak{Q}| = 0 \quad (9.17)$$

die gesuchte Frequenzgleichung.

Nun lauten die beiden Federmatrizen nach (6.02) und wegen $\widehat{D} \cdot \mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}_i^*$:

$$\mathfrak{E}_1^* = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{r1} \\ -\Delta/B & 1 \\ 1+1 & -\Delta/B \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{E}_2^* = \begin{pmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{r2} \\ -\Delta/B & 1 + C_A^* \\ 1+1 & -\Delta/B \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

wo $C_A^* = C_A \widehat{D}$ die Ersatzfeder des Rahmenteiles ABS ist. Nun wird aus (9.18) durch Zeilenvertauschung (6.05):

$$\mathfrak{A} \mathfrak{C}_1^* = \begin{bmatrix} 2 & -\Delta/B \\ -\Delta/B & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{A} \mathfrak{C}_2^* = \begin{bmatrix} 2 & -\Delta/B \\ -\Delta/B & 1 + C_A^* \end{bmatrix}, \quad (9.19)$$

ferner

$$\mathfrak{A} \mathfrak{C}_1^* \mathfrak{A} \mathfrak{C}_2^* = \begin{bmatrix} 4 + F & -\frac{\Delta}{B} (3 + C_A^*) \\ -3 \frac{\Delta}{B} & 1 + F + C_A^* \end{bmatrix}. \quad (9.20)$$

Damit lautet die Matrix \mathfrak{Q} :

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 11 - 4F & -\frac{\Delta}{B} (6 - F + C_A^*) \\ -\frac{\Delta}{B} (6 - F) & (5 - 3F) + C_A^* (2 - F) \end{bmatrix}, \quad (9.21)$$

deren Determinante sich leicht berechnen läßt. Wegen $\Delta^2/B^2 = 1 + F$ geht (9.17) über in

$$0 = \frac{B^6}{\Delta^6} \left\{ (11 - 4F)(5 - 3F) - (1 + F)(6 - F)^2 + C_A^* [(11 - 4F)(2 - F) - (1 + F)(6 - F)] \right\} \quad (9.22)$$

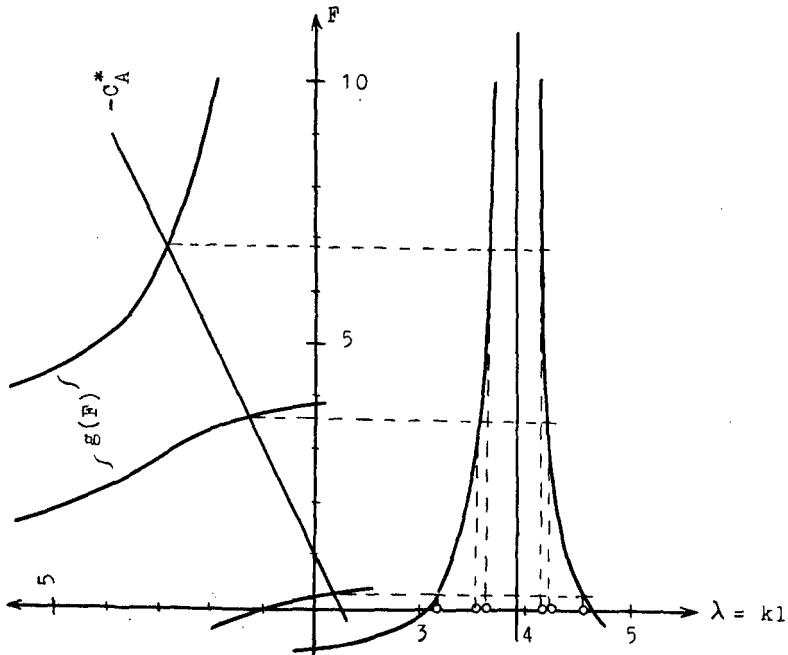


Abb. 17. Zeichnerische Ermittlung der $3 \cdot \infty^1$ Eigenfrequenzen des Rahmens von Abb. 16

$B = 0$ ist keine Lösung, da F in der dritten Potenz vorkommt (4.11!). Die geschweifte Klammer gleich Null gesetzt ergibt die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{(11 - 4F)(5 - 3F) - (1 + F)(6 - F)^2}{(11 - 4F)(2 - F) - (1 + F)(6 - F)} &= \\ &= \frac{19 - 77F + 23F^2 - F^3}{16 - 24F + 5F^2} = g(F) = -C_A^* \end{aligned} \quad (9.23)$$

Die gebrochen rationale Funktion $g(F)$ wird über einer F -Achse aufgetragen; ihre Nullstellen $F_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ und $F_3 = 19$ ergeben die (hier nicht gesuchten) Eigenschwingungszahlen des Tragwerkes ohne den Rahmenteil ABS .

Ist nun in A irgendein beliebiges (auch nicht homogenes) Tragwerk eckensteif angeschlossen, so braucht man nur dessen Ersatzfederkonstante C_A nach Abschnitt 5 zu berechnen und hat sofort die Frequenzgleichung (9.23) dieses zusammengesetzten Systems. In unserm Fall ist einfach nach (5.02) und Tabelle 2 für $n = 2$:

$$-C_a^{(2)} = C_A = \frac{N_2}{H_2 \cdot \widehat{D}} = \frac{1 - F}{2 \widehat{D}}, \quad (9.24)$$

also

$$-C_A^* = -C_A \cdot \widehat{D} = \frac{F - 1}{2} \quad (9.25)$$

Diese Gerade bringt man nach (9.23) zum Schnitt mit $g(F)$ und liest über der λ -Achse drei Serien von Eigenwerten ab (Abb. 17).

10. Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, wie sich die Biege-Eigenschwingungszahlen ebener Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knoten mit Hilfe geeignet definierter rechteckiger Leitmatrizen einfach und übersichtlich berechnen lassen und die Methode an vier praktischen Beispielen vorgeführt. Für homogene Tragwerke kommt man mit einer einzigen transzendenten Funktion $F = DS/B^2$ aus, deren Tabulierung wünschenswert wäre und auch keine allzu große Schwierigkeit bereitet, da Tabellen für die Funktionen S/B und B/D bei Hohenemser-Prager bereits vorliegen.

Literatur

- [1] *Hohenemser-Prager*, „Dynamik der Stabwerke“, Springerverlag 1933.
- [2] *Falk, S.*, „Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens“. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band VII, 1955. Verlag Vieweg und Sohn, Braunschweig.